14 प्राथमिक स्कूल में गणित सीखने में मूर्त अनुभवों की भूमिका

मीना सुरेश



स्कूलों में गणित शिक्षण के पारम्परिक तरीकों में तकरीबन एक शताब्दी में भी कोई बड़ा परिवर्तन नहीं हुआ है, यह तब जब कि दूसरी चीजों जैसे हमारी संस्कृति, आस्थाओं और जीवन के ढंग में बहुत बड़ा बदलाव हो चुका है। आज भी, स्कूलों में गणित की पढ़ाई कठोर नीरस अभ्यास का ही दूसरा नाम है। स्कूलों में हो रहे अध्यापन में, विशेषकर प्राथमिक कक्षाओं में, सघन, केन्द्रित ध्यान का अभाव दिखाई देता है। शिक्षकों के लिए गणित ज्यादातर एक भ्रमित करनेवाला विषय रहा है क्योंकि वे स्वयं नहीं जानते कि वास्तव में गणित है क्या, वे इस विषय से सम्बन्धित शैक्षणिक मुद्दों के बारे में निश्चिन्ततापूर्वक अनजान रहते हैं। इसके बारे में समझ न होने से, इसे पढ़ाने के लिए शिक्षकों की तैयारी ठीक नहीं होती, जिसके फलस्वरूप भ्रम का यह सिलसिला चलता रहता है, और उनके छात्र भी अपने पूरे स्कूली दौर में गणित को लेकर भ्रमित बने रहते हैं। विडम्बना यह है कि स्कूल के गणित में उच्च अंक प्राप्त करने वाले छात्र भी कॉलेज स्तर के गणित के लिए तैयार नहीं होते हैं। कुकुरमुत्तों की तरह उगते ट्यूशन सेन्टर इस बात का प्रमाण हैं। समझ की यह कमी जीवन को गहराई तक प्रभावित करती है, खासतौर से उन कामों में जिन्हें लोगों को एक आम आदमी की तरह करना होता है, जैसे प्रतिशत का हिसाब लगाना या फिर करों की गणना करना। इससे यह बहस शुरू होती है कि क्या परीक्षाओं का गणित गणितीय समझ का सही सूचक होता है?

एनसीटीएम (नेशनल कौंसिल ऑफ टीचर्स ऑफ मैथेमेटिक्स) ने गणित सीखने के मानक स्तर के रूप में दो श्रेणियों की पहचान की है। ये स्तर हैं (अ) गणितीय सोच का स्तर (ब) गणितीय विषयवस्तु का स्तर। 'गणितीय सोच' के स्तर में गणित की चिन्तन प्रक्रिया की प्रकृति पर ध्यान केन्द्रित किया जाता है, जैसे सवालों को हल करना, विचारों का सम्प्रेषण करना, तर्क करना और तथ्यों में सम्बन्ध स्थापित करना। 'गणितीय विषयवस्तु' के मानक स्तर में गणित के खास विषयाँश (टॉपिक्स), जैसे संख्या ज्ञान, अनुमानन, ज्यामिति, मापन, सांख्यिकी, प्रायिकता (सम्भाव्यता), भिन्न संख्याएँ, नियमित संरचनाएँ और सम्बन्ध इत्यादि शामिल रहते हैं। एक ओर जहाँ गणित की विषयवस्तु बहुत महत्वपूर्ण है, वहीं 'गणितीय सोच' के क्षेत्रों को विषयवस्तु में पिरोया जाना भी उतना ही महत्वपूर्ण है। स्कूल में गणित सीखने का पूरा अनुभव सीखने वालों के लिए इस तरह से बुने गए एक ऐसे वस्त्र की तरह होना चाहिए जिस पर छात्र नए विचारों को जानने और गणितीय सोच को विकसित करने के अपने अनुभवों को चित्रित कर सकें। गणितीय कौशलों की प्रकृति प्रायः जुड़ते जाने की होती है, अर्थात पहले सीखे गए कौशल के आधार पर दूसरा कौशल निर्मित होना। उदाहरण के तौर पर बुनियादी अंकगणित की ठीक समझ के बिना बीजगणित की अवधारणाओं को आत्मसात् नहीं किया जा सकता है। इस सच्चाई के कारण, बुनियादी अवधारणाओं के बारे में ठीक समझ न होने का प्रतिकूल प्रभाव छात्रों पर दूर तक पड़ता है और जुड़ता जाता है। यह नितान्त आवश्यक है कि प्राथमिक विद्यालय के छात्रों में बुनियादी अवधारणाओं की स्पष्ट समझ बने और वे शिक्षकों के आदेशानुसार सिर्फ सूत्रों (फार्मूलों) और तथ्यों को ही न रटें।

> *''एक सामान्य कक्षा में, शिक्षक सरकस के रिंगमास्टर की भूमिका में रहता है, जो कक्षा को एक के बाद एक सिलसिलेवार निर्देश देता जाता है जिनमें अन्वेषण के लिए कोई जगह नहीं होती। इस तरह के निर्देश जैसे ''एक लाल कड़ी को लेकर इसे मेज पर रख दो। दो लाल कड़ियाँ लेकर उन्हें जोड़ो और फिर उन्हें पहली एक कड़ी के आगे रख दो ' और ''मैं जैसा कहता हूँ वैसा करो''। जबकि एक संवेदनशील शिक्षक इस तरह के निर्देश, जैसे कि ''लाल कड़ियों का उपयोग करो 'या ''दो कड़ियों को एक के आगे रख दो'' आदि–आदि, न देकर वस्तुओं का बेहतर इस्तेमाल करेगा।''*

अनुभवजन्य सीखने की पद्धति छात्रों को ठोस अनुभव प्रदान करती है, और यह सुनिश्चित करती है कि सीखने की प्रक्रिया में उनकी सक्रिय भूमिका अधिक से अधिक हो। इस ढंग से सीखने की पद्धति में समझ पर और विवेचनात्मक सोच को बढ़ाने पर ध्यान केन्द्रित किया जाता है, इसलिए इसमें छात्र खुद ही योजना बनाना, उसे कार्यान्वित करना, चर्चा करना, परस्पर संवाद करना और निष्कर्ष पर पहुँचना सीखते हैं। यह सब गणित के बारे में विशेषकर सत्य है क्योंकि यह विषय ही अमूर्त है। छात्रों को अनुभव के आधार पर सीखने का अवसर प्रदान करने का एक

व्यवहारिक तरीका है 'प्रहस्तनीय' वस्तुओं (मैनिपुलेटिव्स) का इस्तेमाल करना। प्रहस्तनीय वस्तुएँ यानी जिन्हें छात्र हाथों से छू सकते हैं और इधर–उधर कर सकते हैं। इनका प्रयोग गणित की किसी विशेष विषयवस्तु से छात्रों का या तो परिचय कराने के लिए या फिर उसे मजबूत बनाने के लिए किया जा सकता है। एक ओर जहाँ इनका उपयोग छात्रों की सक्रिय भागीदारी को सुनिश्चित करेगा, वहीं शिक्षकों की भूमिका होती है ऐसी गतिविधियाँ रचना जो विषयवस्तु को छात्रों तक पहुँचाने में, और साथ ही उन्हें 'गणितीय सोच' के आवश्यक स्तर तक पहुँचने में मदद कर सकें। शोध से पता चला है कि प्रहस्तनीय वस्तुएँ गणित सीखने में विशेष रूप से सहायक होती हैं क्योंकि वे सीखने वाले को मूर्त से अमूर्त स्तर तक पहुँचने में मदद करती हैं। कक्षा की गतिविधियों को सावधानीपूर्वक ऐसा बनाया जाना चाहिए और इस तरह व्यवस्थित किया जाना चाहिए कि वे मूर्त से अमूर्त के बीच एक सेतु का काम करें। इस बात पर ध्यान देना बहुत महत्वपूर्ण है कि सिर्फ ऐसी चीजों के उपयोग से ही वांछित परिणाम तब तक प्राप्त नहीं होगा, जब तक कि इन चीजों का इस्तेमाल करनेवाले अनुभवों की रचना सावधानी से नहीं की जाएगी। इस तरह अब हम उस व्यावहारिक प्रश्न पर पहुँचते हैं कि प्रहस्तनीय सामग्री का क्यों, कब, कहाँ, कैसे और किसके साथ उपयोग किया जाना चाहिए। हालाँकि ऊपर पूछे गए सभी प्रश्नों पर चर्चा करना इस लेख की सीमा से परे है, पर इतना निश्चित तौर पर कहा जा सकता है कि कोई भी शिक्षक स्वयं से ये सभी प्रश्न पूछ सकता है, और उनके उत्तरों को खोज लेना या उन तक पहुँच जाना मुश्किल नहीं है।

हम अनुभवजन्य सीखने के तरीकों की चर्चा कक्षाओं में उनके सबसे प्रभावी ढंग से प्रयोग किए जाने की दृष्टि से करेंगे। प्रहस्तनीय चीजों को उपयोग करने का अनुभव ऐसा होना चाहिए ताकि विद्यार्थी अपने स्वयं के निष्कर्षों पर पहुँचें और गणितीय अन्तर्दृष्टि प्राप्त कर सकें। इसका तौर–तरीका खोजबीन पर आधारित होना चाहिए। शिक्षकों को सिर्फ मार्गदर्शक या सहायक की भूमिका में रहना चाहिए और उन्हें छात्रों को कभी–कभी ऐसे कामों का प्रयास भी करने देना चाहिए जो हास्यास्पद या गैर उत्पादक लगें। इस चर्चा को आगे बढ़ाते हुए, आइए यह देखें कि अमूमन कक्षाओं में क्या होता है।

स्थिति 1: कड़ियों का उपयोग करते हुए संख्याओं के अनुक्रम से छात्रों का परिचय कराना – कड़ियों का बाह्य निरूपण की तरह उपयोग करना

एक सामान्य कक्षा में, शिक्षक सरकस के रिंगमास्टर की भूमिका में रहता है, जो कक्षा को एक के बाद एक सिलसिलेवार निर्देश देता जाता है जिनमें अन्वेषण के लिए कोई जगह नहीं होती। इस तरह के निर्देश जैसे "एक लाल कड़ी को लेकर इसे मेज पर रख दो। दो लाल कड़ियाँ लेकर उन्हें जोड़ो और फिर उन्हें पहली एक कड़ी के आगे रख दो" और "मैं जैसा कहता हूँ वैसा करो"। ऐसे में गतिविधि तो पूरी हो जाती है, और शिक्षक को संतोष हो जाता है कि उसने निर्धारित विषयवस्तु को छात्रों को सिखा दिया है; लेकिन छात्रों के लिए ऐसी गतिविधि एक बेसिर पैर की घटना की तरह होती है, और यह तय ही समझिए कि वे इससे 'गणितीय सोच' की किसी भी विषयवस्तु को आत्मसात नहीं करते।

एक संवेदनशील शिक्षक इस तरह के निर्देश, जैसे कि "लाल कड़ियों का उपयोग करो" या "दो कड़ियों को एक के आगे रख दो" आदि–आदि, न देकर प्रहस्तनीय वस्तुओं का बेहतर इस्तेमाल करेगा। ऐसा शिक्षक कम से कम निर्देश देगा। वह छात्रों को अपनी पसन्द के रंग या रंगों के जोड़े चुनने की छूट देते हुए अपना ध्यान इस बात पर केन्द्रित करेगा कि वे विभिन्न लम्बाइयों की श्रृंखलाएँ बनाएँ, उन्हें क्रम से जमाएँ और संख्याओं के अनुक्रम को खुद से खोजकर इस तथ्य पर पहुँचें कि 'एक और बढ़ाने से अगली संख्या मिलती है' और इस तरह वह छात्रों को इस अवधारणा को आत्मसात करने का अवसर देता है।

स्थिति 2 : साधारण जोड़ – अभिकलन गणित की विधि को निरूपित करने में गणकों का उपयोग

जब एक शिक्षक जोड़ सिखाने का प्रयास करता है (जैसे 3 + 2 मिलकर 5 हो जाता है) तो छात्र 3 लाल गणक और 2 सफेद गणक उठाते हैं फिर उन सबकी एक साथ गणना कर उत्तर तक पहुँचते हैं। इस गतिविधि में प्रहस्तनीय चीजों (गणकों) का प्रयोग संख्याओं के प्रतीकों की तरह होता है।

ऐसे अनुभव बहुत अच्छी शुरुआत होते हैं; लेकिन, जल्दी ही शिक्षक को अगले स्तर पर जाना चाहिए जहाँ चीजें 'सोचने के तरीकों' के द्वारा गणित के सवालों को हल करने में छात्रों के लिए सन्दर्भ बिन्दु का काम करती हैं। छात्रों को जोड़ क्रिया की ऐसी खूबियों, जैसे क्रमपरिवर्तन की समतुल्यता (कम्यूटेटिव आइडेंटिटी), या योग की समतुल्यता (ऐडीटिव आइडेंटिटी शून्य जोड़ना), को खुद से खोज कर मालूम करना चाहिए। शिक्षकों को सिर्फ मार्गदर्शक की तरह संकेतों और उनसे जुड़े गणितीय विचारों को समझने में छात्रों की मदद करना चाहिए।

स्थिति 3: शाब्दिक सवाल चिन्तन प्रक्रिया के बाह्य प्रतीकों की तरह स्थानिक मान दर्शानेवाली प्रहस्तनीय वस्तुओं का उपयोग

दिया गया शाब्दिक सवालः एक विद्यालय में 156 लड़के और 212 लड़कियाँ हैं। कुल मिला कर कितने छात्र हैं?

इस प्रश्न को हल करने के लिए छात्र स्थानीय मान दर्शाने वाली प्रहस्तनीय वस्तुओं का प्रयोग करते हैं। इनमें इकाई या 1 दर्शाने वाले छोटे वर्गाकार टुकड़े, दहाई या 10 दर्शाने वाली पट्टियाँ और सैकड़ा या 100 दर्शाने वाले बड़े वर्ग – जिनमें दहाई वाली 10 पट्टियों को जोड़कर 100 बनता है – होते हैं। यहाँ, प्रहस्तनीय वस्तुओं का प्रयोग चिन्तन की प्रक्रिया और उसके क्रम के बाहरी प्रतीकों के रूप में किया जाता है। यानी छात्र प्रहस्तनीय वस्तुओं का सिर्फ जोड़ने की क्रिया सम्पन्न करने के लिए ही उपयोग नहीं करते, बल्कि उन्हें अपनी सोचने की प्रक्रिया को बाहर प्रदर्शित करनेवाले प्रतीकों की तरह देखते हैं। इसका मतलब है कि छात्र यह जानते हैं कि उन्हें क्या करना है और सामग्री का प्रयोग वे सिर्फ उत्तर तक पहुँचने के लिए सहारे के रूप में करते हैं। ये अनुभव अच्छे हैं लेकिन इनमें गणितीय अन्तर्दृष्टि की कमी है। गणितीय अन्तर्दृष्टियों को तो स्वयं ही खोजना पड़ता है।

स्थिति 4 : पहाड़े – आड़ी–खड़ी काटती हुई डण्डियों के जाल को अभिकलन विधि के बाह्य प्रतीक की तरह प्रयोग करना

इसमें छात्र 'पहाड़ों के प्रहस्तनीय निरूपण' (आड़ी–खड़ी काटती हुई डण्डियों के जाल से पहाड़े सीखना) का प्रयोग करते हैं। यह प्रयोग एक गतिविधि बनकर ही रह जाता है अगर छात्रों को यह गणितीय विचार समझ में न आ जाए कि गुणन दरअसल उसी संख्या को बार–बार जोड़ने की प्रक्रिया का ही छोटा रूप है, और यह भी कि गुणा करने पर संख्याओं में किस तरह वृद्धि होती है। उदाहरण के लिए मानसिक रूप से यह देख पाना कि 6 X 4 दरअसल 6 + 6 + 6 + 6 है, और यह भी 6 बढ़कर कितना बड़ा हो जाता है। ऐसे अनुभवों में, प्रहस्तनीय चीजों का उपयोग अवधारणाओं के संरचनात्मक तत्वों को सहारा देने के लिए किया जाता है।

परन्तु, यह फिर एक अधूरा गणितीय दृष्टिकोण है। ऐसे अनुभव जो चर्चाओं और व्याख्याओं को बढ़ावा देकर निष्कर्षों की ओर ले जाते हैं, गणित सीखने की प्रक्रिया को सहारा देने वाले सबसे अच्छे तरीके होते हैं। (टिप्पणीः यहाँ मैं युवा घुमन्तु छात्रों की एक कक्षा के बारे में अपने एक अनुभव की बात करने का लोभ संवरण नहीं कर पा रही हूँ। वे सभी औपचारिक स्कूल छोड़ चुके थे और काँचीपुरम में एक गैर सरकारी संगठन द्वारा चलाए जा रहे अनौपचारिक स्कूल में थे। मैं तब स्तब्ध रह गई जब मैंने अपनी कक्षा में एक छात्र को अपने साथियों को यह बताते हुए सुना कि वे कक्षा में जो कर रहे थे वह दरअसल 'पहाड़े' बनाना था। उसने कहा कि गुणा करना वैसा ही था जैसा कि जंजीरों को बेचना। उसने आगे समझाया कि – ''हमें सामान की कीमत कैसे पता चलती है? मान लो अगर कहें कि हम एक जंजीर बेचते हैं जिसकी कीमत 6 रुपये है, तब 4 जंजीरों की कीमत 24 रुपये होगी।'' यह व्याख्या इस तथ्य को देखते हुए बहुत महत्वपूर्ण है कि वे छात्र तब तक अंकों से ही जूझ रहे थे, और गणित के संकेतों जैसे x या ÷ से उनका कोई परिचय नहीं था।)

स्थिति 5 : क्षेत्रफल की समझ – वर्गाकार टाइलों का पहले चिन्तन प्रक्रिया के बाह्य प्रतीकों की तरह, और बाद में चर्चा और खोजबीन के सन्दर्भ बिन्दुओं की तरह उपयोग।

यहाँ शिक्षक प्रहस्तनीय चीजों की तरह वर्गाकार टाइलों का उपयोग संरचना बनाने और अनुभव प्रदान करने के लिए करते हैं। इसमें छात्र इन टाइलों को वर्गों और आयतों में जमाने की प्रक्रिया से यह निष्कर्ष निकालते हैं कि लम्बाई x चौड़ाई = क्षेत्रफल होता है। इस अनुभव से कम से कम इतना तो सीखा ही जा सकता है। पर यह अनुभव महत्वपूर्ण तभी बनता है जब छात्र यह देखने में सक्षम हो जाते हैं कि वर्गाकार टाइलों से न केवल 4, 9 या 16 वर्ग इकाई क्षेत्रफल के वर्ग बनाए जा सकते हैं, बल्कि किसी भी क्षेत्रफल की वर्गाकार आकृति बनाना सम्भव है (बशर्ते कि प्रहस्तनीय वस्तुओं पर कोई बन्धन न हो)। इस अनुभव में, प्रहस्तनीय चीजों का उपयोग न सिर्फ अवधारणा की समझ को सहारा देने के लिए बल्कि इस समझ को बाँटने के लिए भी किया जाता है। कक्षा में होने वाली चर्चा से विद्यार्थियों को इस निष्कर्ष पर पहुँच सकना चाहिए कि परिधि की विभिन्न मापों (परिमाप) वाले ऐसे आयत बनाए जा सकते हैं जिनका क्षेत्रफल समान हो। इन टाइलों को बार–बार अलग–अलग ढंग से जमाकर छात्र इस छिपे हुए तथ्य तक भी पहुँच सकते हैं कि वर्गाकार आकृतियाँ किसी भी दिए गए क्षेत्रफल के लिए सबसे सुगठित और अल्पतम परिधि वाली होती हैं। यह प्रहस्तनीय वस्तुओं का सबसे बेहतर उपयोग होगा।

ऊपर दिए गए सभी उदाहरणों से यह स्पष्ट है कि अनुभवजन्य सीखने का तरीका सिर्फ प्रहस्तनीय चीजों का उपयोग करके की जानेवाली गतिविधियों का दूसरा नाम भर नहीं है। शिक्षकों को गतिविधियों की ऐसी कई शृंखलाओं में से छात्रों को ले जाना होगा, जिनमें प्रहस्तनीय चीजों का उपयोग शुरुआत में प्रतीकों की तरह, फिर चिन्तन की प्रक्रिया के बाह्य निरूपण की तरह, और बाद में चर्चा और खोजबीन के लिए सन्दर्भ बिन्दुओं की तरह किया जाता है। इस बात पर भी गौर किया जाना चाहिए कि अनुभवजन्य सीखने की पद्धति में प्रारम्भ में हर छात्र पर

अलग–अलग ध्यान दिया जाता है, और धीरे–धीरे पूरी कक्षा समग्र रूप से ध्यान का केन्द्र हो जाती है। प्रारम्भ में प्रहस्तनीय चीजों का उपयोग किस तरह किया जाए यह पूरी तरह से शिक्षक ही तय करता है, और यह शिक्षक पर बहुत ज्यादा निर्भर करता है। पर धीरे–धीरे यह पूरी जिम्मेदारी छात्रों की बन जाना चाहिए। जब ऐसा हो जाए तभी 'गणितीय सोच' का 'गणितीय विषयवस्तु' में समावेश हो पाता है।

प्रहस्तनीय चीजों की सहायता से अनुभवजन्य सीखने का तरीका विशेष रूप से प्राथमिक कक्षाओं के लिए अच्छा है। किन्तु, यह सिर्फ शुरुआत होती है, प्रहस्तनीय चीजों का सिर्फ एक बार प्रयोग, या बहुत सी हिदायतों और बिखरे–बिखरे लिखने के अभ्यासों के साथ सिर्फ एक बार इनका प्रदर्शन करने से 'गणितीय सोच' के मानक स्तरों को प्राप्त करने में कोई मदद नहीं मिलेगी।

शिक्षक द्वारा प्रहस्तनीय वस्तुओं का सावधानीपूर्वक चयन करके और समझदारी से योजना बना कर, समुचित हिदायतों के साथ इनका प्रयोग करवाने से, और इसके बाद होनेवाली चर्चाओं से नन्हें सीखने वालों पर जबर्दस्त प्रभाव पड़ेगा, फलस्वरूप उनकी बौद्धिक और स्वतंत्र समझ विकसित होगी और जिससे वांछित परिणाम भी मिलेंगे।

मीना सुरेश *वर्तमान में रामानुजन संग्रहालय और गणित शिक्षण केन्द्र की मानद निदेशक हैं। वे एक शिक्षक प्रशिक्षक हैं और उन्होंने 'हैंड्स–ऑन–मैथ (करके सीखनेवाली गणित)' के बारे में शिक्षकों की 100 से अधिक कार्यशालाओं का संचालन किया है। उन्होंने इस संस्था के जरिये, काँचीपुरम के एक गैर सरकारी संगठन 'हैंड इन हैंड' के साथ मिलकर साल भर की एक ऐसी परियोजना बनाई और उसे लागू किया है जो शाम को चलने वाले 250 ट्यूशन सेन्टर (एचआईएच द्वारा संचालित) के 14,000 बच्चों को स्कूल में गणित की पढ़ाई में अतिरिक्त सहायता देती है। उनसे* meena.kavibharathi@gmail.com *पर सम्पर्क स्थापित किया जा सकता है।*

